ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES DE PRIMER ORDEN

Una ecuación diferencial de la forma

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = f(x)$$

Donde a_1 y a_0 son funciones solo de *x*, o constantes con $a_1 \neq 0$ en caso de valores iniciales dados, es una ecuación diferencial lineal y se puede expresar en la forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x), \text{ Forma estándar}$$

SOLUCION DE UNA ECUACION DIFERENCIAL LINEAL DE PRIMER ORDEN

Resolver la siguiente ecuación:

$$x\frac{dy}{dx} = 2x^2 + x + y$$

1. Expresar la ecuación en la forma estándar para reconocer *P(x)* y *Q(x):*

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

Se divide la ecuación inicial en *x* para obtener

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 1 + \frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = 2x + 1$$

2. Determinar el factor integrante:

$$\mu = e^{\int P(x)dx}$$

$$e^{\int -\frac{1}{x}dx} = e^{-\int\frac{dx}{x}} = e^{-\ln x} = e^{\ln x^{-1}} = e^{\ln\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$$

3. Multiplicar la ecuación por el factor integrante determinado:

$$\frac{1}{x}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x^2}y = 2 + \frac{1}{x}$$

4. Verificar que el lado izquierdo de esta igualdad corresponda a la derivada del producto *μ(x)y:*

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}y\right] = \frac{1}{x}y + (-x^{-2})y = \frac{1}{x}y - \frac{1}{x^2}y$$

5. Sustituir el lado izquierdo de la igualdad por su equivalente:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}y\right] = 2 + \frac{1}{x}$$

6. Integrar la igualdad y despejar y para obtener la solución general:

$$\frac{y}{x} = \int \left(2 + \frac{1}{x}\right) dx = 2x + \ln x + c$$

$$\frac{y}{x} = \int \left(2 + \frac{1}{x}\right) dx = 2x + \ln x + c$$

$$y = 2x^2 + x\ln x + xc$$

EJERCICIOS

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales lineales

1. $\frac{dy}{dx} = x^2$+ 2x -2y
2. $x\frac{dy}{dx} - 4y = x^6e^x$
3. $x\frac{dy}{dx} = x^2$+ 2y
4. $y' + y = e^x$
5. $\frac{dy}{dx} + 2xy = x$
6. $(x^2 + 9)\frac{dy}{dx} + xy = 0$
7. $y' + 3x^2y = x^2$
8. $x^2y' + xy = 1$
9. $y' + 2xy - x^3 = 0$
10. $y' = 2y + x^2 + 5$
11. $xdx = (xsen\, x - y)dx$
12. $xdx = (x^3 - x - 4y)dy$